Fiche partiel

# Equilibre statique des solides indéformables

## Définitions

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Point matériel | Système matériel | Solide indéformable (ou rigide) |
| Portion de l’espace suffisamment petit pour etre considéré comme un point auquel est associé une masse | Système constitué d’un ensemble de points matériels | Système matériel par lequel la distance entre les points matériel est constante |

## Lois de Newton

* Si un corps n’est soumis à aucune force, alors sa vitesse est constante : le corps est alors au repos, soit il suit un mouvement rectiligne uniforme
* Lorsqu’un premier corps exerce une force sur un second cops ce dernier exerce simultanément une force sur le premier. Ainsi et sont égales et de directions opposées.

## Différents types de force

* Forces extérieures
  + Force de contact : réaction des pieds sur le sol
  + Force de surface : force de pression
  + Force volumique : gravité
* Forces intérieures : qui assurent la cohésion du solide

## Notation

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Mouvement de translation = une force .  Celle-ci possède un point d’application, une direction, un sens, une intensité.   * Exemple : généralement notée   Somme des forces = Résultante  notée | Mouvement de rotation autour du point = un moment  exercé par au point noté . |

## Calcul du moment

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Moment au point avec une force appliquée en  le bras de levier  la force | Moment au point avec une force appliquée en  Soit : | Formule du transport de moment : |

## Système continu

* Force : On utilise , une densité de force par unité de volume (en ) soit :
* Résultante :
* Moment :

Une particule est à l’équilibre si la résultante des forces qui s’appliquent sur la particule est nulle ainsi :

* Théorème de la résultante statique :
* Théorème du moment statique : (tous les moments doivent être calculés au même point)

## Efforts extérieurs, efforts de liaisons

Dans un problème plan on ne considère que 3 degrés de liberté . Les liaisons mécaniques s’opposent à certains mouvements entre les solides, on a donc la correspondance : 1 degré de liberté (ddl) supprimé dans 1 direction = 1 réaction de liaison dans cette direction. De manière générale, lorsque deux solides sont « liés », connaître la nature de la liaison permet de réduire le nombre d’inconnues.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Appuis simple | Articulation | Encastrement | Liaison interne articulé | Liaison interne rigide |
|  |  |  |  |  |
| 1 inconnue de liaison | 2 inconnues de liaison | 3 inconnues de liaison | 2 inconnues de liaison | 3 inconnues de liaison |

Le nous donne trois équations de la statique, qui vont nous permettre de déterminer les inconnues de liaison des structures. Dans certains cas, il y a soit trop ou pas assez d’inconnues pour le nombre d’équations, on parle de notion d’équilibre des systèmes.

|  |  |
| --- | --- |
| Equilibre des systèmes | Classification des systèmes mécaniques vis-à-vis de la statique externe |
|  | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | Hypostatique |  | Instable | Liaisons insuffisantes | | Isostatique |  | Stable | Statiquement soluble | | Hyperstatique |  | Stable | Statiquement insoluble | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Une barre | Un nœud rigide | Un nœud articulé | Pour déterminer l’état d’équilibre d’un système, on calcule le degré d’hyperstaticité de la structure : |
| 3 équations | 3 équations | 2 équations |

Exemples :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Hypostatique | Isostatique | Hyperstatique de degré 1 | Isostatique | Hyperstatique de degré 1 |

# Rappels mathématiques

## Définitions

|  |  |
| --- | --- |
| Vecteur unitaire | Produit scalaire |
| À chaque vecteur peut être associé un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à . On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par sa norme.  Dans un repère orthogonal , les vecteurs unitaires de la base sont portés à partir de l’origine du repère et forment un trièdre direct. | Le produit scalairede deux vecteurs non nuls et est le nombre réel avec désignant l’angle . Si l’un des vecteurs est nul, alors le produit scalaire est nul.  Commutatif : car  Distributif :  Par conséquent :Si , et , alors implique que  Expression analytique : |

## Projections et composantes de vecteurs

|  |  |
| --- | --- |
| Produit scalaire | Produit vectoriel |
| Dans un repère orthonormé , un vecteur se décompose comme suit : Calcul des composantes avec le produit scalaire :  Calcul des composantes avec les angles : Or, nous avons défini comme l’angle entre et , et nous savons que : et que d’où  De même  Soit  Rappel : | Soit le vecteur , produit vectoriel des vecteurs non nuls et , le vecteur a pour propriétés :   * Module : égal à (avec désignant l’angle ) * Direction : perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs et * Sens : La base est de sens direct.   On peut vérifier que l’on a une base directe en utilisant la règle dite « de la main droite »  Expression analytique :   * Anticommutatif : car * Distributif par rapport à l’addition : * Le module de , donné par , représente l’aire du parallélogramme construit par les vecteurs et * Si et , et que , alors et sont colinéaires |

## Rappels de trigonométrie

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## Les repères (ou bases)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Type de repère | Repère cartésien | Repère cylindrique (3D) | Repère polaire (2D) | **Repère sphérique (3D)** |
| Représentation graphique |  |  |  |  |
| Base | Les vecteurs , , et forment un trièdre direct | Les vecteurs , , et forment un trièdre direct | Les vecteurs , , et forment un trièdre direct | Les vecteurs , , et forment un trièdre direct |
| Paramètres |  |  |  |  |
| Vecteur position |  |  |  |  |

## Passage de la base polaire (ou cylindrique) vers la base cartésienne

|  |  |
| --- | --- |
|  | On a donc : |

Autre exemple : Pour un vecteur quelconque de composante et dans le repère  :

Parfois, on utilise des matrices de passage tel que :   
On a alors : et aussi   
Pour déterminer l’inverse de la matrice :

# Cinématique

La cinématique est la partie de la mécanique permettant l’étude des mouvements des corps indépendamment de leurs causes.  
Grandeurs cinématiques : position, vitesse, trajectoire, accélération  
Ces grandeurs permettent de déterminer la géométrie et les dimensions des composants d’un mécanisme.  
La cinématique, combinée à l’étude des actions mécaniques, permet l’application du principe fondamental de la dynamique.

L’étude de tout mouvement nécessite :

* Un solide dont on étudie le mouvement
* Un solide ou un référentiel par rapport auquel on définit le mouvement

Selon le type de repère choisi, deux points de vue sont possibles :

|  |  |
| --- | --- |
| Point de vue Lagrangien | Point de vue Eulérien |
| Le point de vue Lagrangien consiste à décrire le mouvement, ou les déformations, par rapport à un observateur qui se déplace ou pas**.**   * Permet d’appliquer les lois physiques * Parfaitement adapté pour décrire les mouvements des objets non déformables * Il devient rapidement complexe pour les solides déformables | Le point de vue Eulérien consiste à décrire le mouvement, ou les déformations, par rapport à un observateur qui est immobile. Cela revient à prendre des photos successives   * Plus intuitif * Il nécessite l’utilisation d’outils mathématiques (dérivée particulaire, opérateurs différentiels…) pour passer de la description Lagrangienne où l’on applique les principes généraux de la physique (conservation de la masse, 2nde loi de Newton, 1er et 2nd principe de la thermodynamique) * En général, c’est ce formalisme qui est utilisé pour décrire les déformations des matériaux solides ou fluides |
|  |
| La fonction du point M est décrite par trois fonctions, par rapport à sa position initiale.  Et la vitesse est donnée par la variation de la position (la dérivée)  Attention, le repère peut être immobile (le point O ne bouge pas) ou bien mobile. Exemple classique de la personne qui marche dans le train. | L’observateur étant immobile, c’est comme si l’on prenait une photo.  On peut définir directement le vecteur vitesse à chaque instant dans le repère défini. |
|  |  |

Quelle que soit l’étude cinématique à réaliser, on a toujours besoin de la situer dans le temps. On appelle instant le temps écoulé depuis une origine des temps choisie arbitrairement. (Unité de temps SI : seconde)  
La grandeur est appelée durée entre les instants  
On appelle ensuite trajectoire du point d’un solide l’ensemble des positions occupées successivement par ce point, au cours du temps, et au cours de son déplacement par rapport à un référentiel donné. La trajectoire est alors représentée par une courbe ().

## Position d’un solide

|  |  |
| --- | --- |
|  | Nous devons être en mesure, à tout instant , de définir la positionde n’importe quel point du solide dans l’espace. Pour ce faire, il est nécessaire d’utiliser le vecteur position.  Nous avons vu que le vecteur positiond’un point M du solide, dans un repère orthonormé est donné par : Où les coordonnées ne sont que les projections sur les axes : , et  À un instant , le vecteur position est : |

## Vitesse d’un solide

|  |  |
| --- | --- |
|  | La vitesse est la variation de position.  Dans un repère orthonormé , elle est donnée par :  Soit : |

## Accélération d’un solide

|  |  |
| --- | --- |
|  | L’accélération est la variation de vitesse.  Dans un repère orthonormé , elle est donnée par :  Soit : |

## Dérivée d’un vecteur

Nous savons que : où est le vecteur rotation du repère par rapport à , défini par :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

## **Composition des vitesses**

|  |  |
| --- | --- |
|  | On considère la trajectoire d’un solide représentée par le point et les deux repères. Le repère est fixe tandis que le repère est mobile Nous savons que : soit encore :  On voit que le terme est la vitesse du point dans le référentiel . On peut la noter d’où : |

On utilise la relation de la dérivée d’un vecteur pour déterminer on a

Au final avec et on obtient : qui lie la vitesse absolue(dans le repère immobile) à la vitesse relativedu point dans le repère en mouvement et à la vitesse d’entraînement (d’un repère à l’autre). On note :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| La vitesse absolue | La vitesse relative | La vitesse d’entraînement |
|  |  |  |

Ce qui nous donne :

## Composition des accélérations

On part du fait que : or, on vient de voir que

En décomposant terme à terme on a :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| L’accélération d’entrainement du point dans le repère . | L’accélération relative dans R’  Notée | Ce troisième terme peut être développé comme suit : |

C’est-à-dire l’accélération du solide dans en fonction de l’accélération d’entrainement, l’accélération relative et l’accélération de Coriolis.

# Dynamique

## Définition

Contrairement à la cinématique, la dynamique est l’étude du mouvement d’un corps dans ses rapports avec les forces qui en sont les causes.   
Le mouvement est relatif : il dépend donc du référentiel

Conséquence de la première loi de Newton ou principe d’inertie :

* Lorsque l’on cesse de pousser un objet, il ne s’arrête pas immédiatement. Si un corps arrête son déplacement, c’est qu’une action a été exercée sur lui (ex : frottement)
* De même, un objet au repos ne se met pas en mouvement de lui-même, une action spécifique (ex : force extérieure) est nécessaire.

Le mouvement, ou l’absence de mouvement, a un caractère intrinsèque : l’inertie.

## Référentiels Galiléens

Il existe une classe particulière de référentiels : les référentiels dits d’inertie, inertiels, ou galiléens.

Le référentiel galiléen se définit comme un référentiel idéal dans lequel le principe fondamental de la dynamique est vérifié. Tout corps ponctuel libre est alors soit en mouvement de translation rectiligne uniforme, soit au repos. Si un corps est immobile (), il continuera de l’être. S’il est en mouvement avec une vitesse non nulle, il a conservé indéfiniment à l’identique (norme et direction). Bien que cette définition pose des conditions très fortes, de tels référentiels existent. Dans ce type de référentiels, les vitesses se composent ou s’additionnent vectoriellement (cf chapitre 3 sur la cinématique)

Principe fondamental de la dynamique  **:** Dans un référentiel galiléen, l’accélération du centre d’inertie d’un système de masse constante et proportionnelle à la résultante des forces qu’il subit, et inversement proportionnelle à . Soit :

Ce principe peut se traduire par « si rien de particulier n’arrive à un corps, sa vitesse reste constante, son accélération est donc nulle » (dans un référentiel galiléen)

**Attention !** À ce stade, cette équation définit uniquement la notion de force. Si la vitesse varie, il y a une accélération et donc une force qui s’applique sur le corps.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| pour un point | pour un solide | pour un solide déformable |
|  |  |  |
| Dans un référentiel absolu (ou galiléen), pour tout point de masse :  Si (mouvement uniforme) alors :  **Attention !** Le point n’est pas forcément statique | Dans un référentiel absolu (ou galiléen), on considère des masses liées ainsi que le centre de gravité  :  Calcul du centre d’inertie : | Dans un référentiel absolu (ou galiléen), on considère un solide de masse volumique et de volume . |